

# コンピュータ幾何学を利用した数学と情報の相互理解の実践

川島 正行

岡山理科大学 総合情報学部 情報科学科

## 1. はじめに

コンピュータ幾何学とは古典的には計算幾何学を彷彿とさせるが、現代的にはそうではなく「抽象化された数学世界をコンピュータに実装するための数学の一分野」である。現在では情報学における、可視化との相互的な研究も進められている。本テーマでは数学世界と計算アルゴリズムの狭間を行き来しつつ、数学と情報の相互理解をより一層深めようというものである。

## 2. 背景

本テーマの背景として、情報科学科のコース選択状況がある。情報科学科では3年次に「デジタルメディア」、「Web・モバイル」、「情報数学」、「ビックデータ」の4つのコースに分かれることによりコースごとに専門性が高い教育が行われている。特に各コースのプロジェクト型科目があり4年次の卒業研究に向けて勉強を進める。しかし限られた時間の中でコース制にすることでデメリットも出てくる。それは専門性を高くした故の横のつながりである。すなわち情報の科目に集中するあまり数学の知識内容がおろそかになっていくこと、あるいはその逆の状態が懸念されている。本来は学問としての相互作用がおき、数学の理解においては情報可視化などがその抽象的な理解を助け、また複雑な条件を数学的な思考によってシンプルな条件に落とし込むといったことが行われる。

情報数学コースには数学が得意・好きと

いう学生が多いので数学の知識・経験を活かしながら、情報分野の理解をしていく。これは国際的にも考察されており、1990年後半には「幾何の問題解決活動の日仏比較文化的研究」という幾何学に視点を当てた研究も行われている。その中で問題解決活動の実験として以下のような実験が行われている。

実験 1: 紙と鉛筆による問題解決活動

実験 2: カブリ・ジオメトリーというソフト

ウェアによる問題解決活動

これらの考察から得られるのは「数学の理解の仕方をどのように ICT 機器を用いて実現させるか」という問題意識である。

本テーマでもこのことを問題にして考察をする。

## 3. コンピュータ幾何学

コンピュータ幾何学は古典的には計算幾何学、組合せ論的計算幾何学として述べられることが多い。すなわち幾何の言葉で述べることのできる計算機科学を意味していた。しかし、近年 PC の進歩に伴いグラフィック性能の向上により、従来の計算式・計算結果の提示によるものよりも、その式の意味しているものを、正しさよりもわかりやすさを前面に出したものが好まれるようになってきているというデータも多くみられる。このように現代的には「抽象化された数学世界をコンピュータに実装するための数学の一分野」として捉えられているのが現実であり、情報学における、可視化との相互的な研究も進められている([2])。本テーマでは数学世界と計算アルゴリズムの狭間を行き来しつつ、数学と情報の相互理解をより一層深めようというものである([1])。

現在のコンピュータ幾何学には大きく分けて2つのテーマがある。

### 3-1 静的問題の解決

ここで静的問題の解決とは、ある問題の解にエラーがでたとき、例外処理を行わないようにすることである。例として「任意に与えた2直線の交点を求めるアルゴリズムを構成せよ」という問題を考える。これは連立方程式を解くということで簡単に解決できそうだが、「任意に与えた2直線」というところに落とし穴がある。学生の視点で考えると以下の図のように交わっている場合を考えてしまうことがほとんどだが、「任意に」ということを軽視して下図右のケースを省いてしまうことが多い。下図左のケースならば連立方程式を解くアルゴリズムを提示すれば良いがそのまま下図右のケースに適用するとエラーが出てしまう。

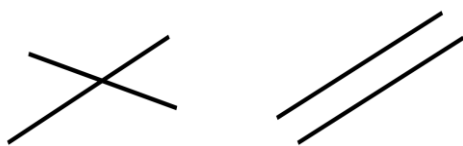


図 1. 静的問題

### 3-2 動的問題の解決

上記の静的問題に対して、動的問題の解決とは、与えられた問題の解が連続的に変化するときの数学的な対処法である。例として「平面上の任意の円と連続的に動く直線の交点を求めよ」と問題を考えてみる。この問題を素朴に考えると下図左のように常に交点があるような場合について考えることが解答の足掛かりになる。

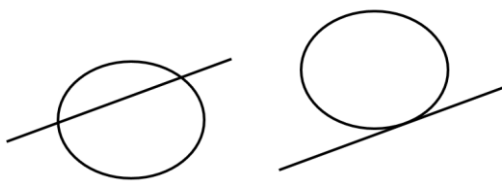


図 2. 動的問題

この場合解の個数は2つであるがその順序付

けや直線を連続的に動かして行ったりするときの解の個数などが問題になる。また上下に動かすだけならこの問題もそこまで複雑ではないが、連続的に動かせることから回転させたり、複数方向に動かすことが可能なため、正確な解の記述が困難になっていくことがこの問題の難しさである。

### 3-3 取り組みの課題解決への着眼点と解決方法

現代数学においては高いレベルの抽象化が行われている。それをシンプルな表現にし、アルゴリズムにうまく乗せることが本テーマを遂行するに重要な事柄である。

幾何学ソフトウェア「Cinderella2」を使用したコンピュータ幾何学の研究・教育は2000年代から展開されてきている。しかしそれは過去の研究会での報告にあるように、ソフトウェアを用いて直感的なイメージを持たせることによって数学の理解を助けようという枠組みで行われてきていた。本テーマにおいては双方からの理解、数学からのソフトウェアの仕組み、またCinderella2には「自動定理証明機能」というものがついており、これを使用して平面幾何の機械的証明のアルゴリズムを中心に学習し、それを用いて数学の定理を証明しようというものである。どのような問題にこの自動定理証明機能が有効かに焦点を当ててアルゴリズムを勉強していくことが発展的なテーマとなる。

## 4. 取り組み

本テーマでは「静的問題の数学的な解決をテーマとして扱う。上に示したようにこれはソフトウェア上でエラーが返ってきたときに、そのエラーを数学的に解決しようというものである。静的問題のデモンストレーション、幾つかの静的問題に対して射影空間を用いた解決方法を紹介する。また課題として与えられた静的問題の解決方法を模索する。

3-1 で取り上げた問題について実際に学生に考察させると、以下のような回答が多く返ってくる。

- 解なしも答え
- なにか記号を当てはめる
- このようなケースは考えない

このような回答の中からコンピュータ幾何学的な回答を得るために 2 つ目の「なにか記号を当てはめる」を用いて、「エラーを出さないために考える世界を広げる」ということにつなげる。

#### 4-1 $\infty$ 記号の導入

「なにか記号を当てはめる」の記号に  $\infty$  のを対応させる。この意味は交わる 2 直線の解を A とするとき、この 2 直線を平行になるように動かしていき、解 A が無限に遠くになっていくというイメージのもとで作られている。

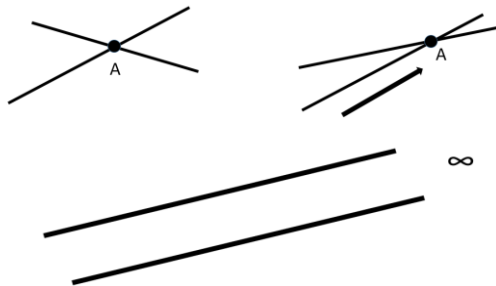


図 3. 静的問題の解決

このように新しい記号などを導入して、考える幅を広げることはとても重要で、この問題に対しては「平行線は交わらない」というユークリッド幾何学の基本事項の確認となる。すなわち、この問題をコンピュータ上でエラーなく処理を行うためにはユークリッド幾何学内での考察ではうまくいかないということがわかる。そこで非ユークリッド幾何学の代表である射影空間の導入を行う。2 直線の交点を求めるのにここまで考える空間を広げることに疑問をもつ学生も多くいるが、これがコンピュータ幾何学の難しさにつながっている側面がある。

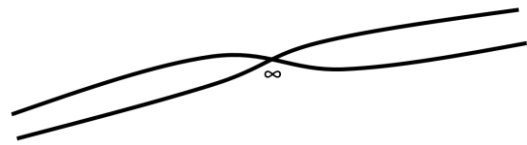


図 4. 射影空間

しかし数学の講義として射影空間を導入するにはいろいろな知識や技術が必要なのでこのようなことが導入の動機付けになるのは良いことだと考えられる。このように「任意に与えた 2 直線の交点を求めるアルゴリズムを構成せよ」という問題は射影空間を導入することによってエラーなく実行できることがわかる。この問題をさらに ICT 機器を用いてアクティブに行うためには前述の Cinderella2 を用いることが効果的ではないかと考える。実際 2 直線を滑らかに動かすことができ、解 A が交わり方によって移動する様子が見ることができ。また、「任意に与えた 5 点を通る二次曲線を求めよ」という問題があるとき、これは代数方程式を解くことによって解が得られるが、その解の存在性やその曲線がどのような形をしているかを考察するのは容易ではない。そのようなときも Cinderella2 を用いることによって解曲線がどのような動きをして互いに移り合っていくかが観察できる。

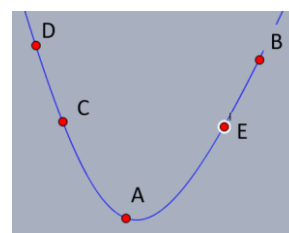
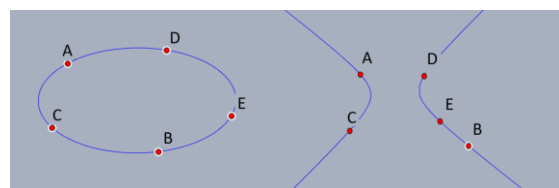


図 5. 二次曲線

## 5. 実施状況

本報告は2017年度、春学期開講、情報科学 3 年情報数学コース対象の情報数学 I の講義に基づくものである。以下は実際に行った講義の流れに基づくものである。

- 1 回～3 回: Cinderella2 の操作を初等幾何学を通して学ぶ。  
 4 回～6 回: 静的問題の数学的な解決について射影平面の二次曲線を通して無限遠点の導入などについて学ぶ  
 7 回: 応用問題について。

1	初等幾何学の復習をして、それに伴う Cinderella2 の操作を行う。三角形の五心について講義し、それらを Cinderella2 を用いて記述する。
2	9 点円, 9 点円定理について解説し、それらを Cinderella2 を用いて証明する。
3	射影空間の歴史や二次曲線に関する基本定理について講義する。
4	3 回で学んだ定理を数学的な表現から Cinderella2 で用いられる言葉で書き換える。特に無限という概念はコンピュータ上には存在しないことに注意をする。
5	実際に Cinderella2 を用いて静的問題に対する理解を深める。まずは 2 直線の交わり の点と連立方程式の解とを結びつける。
6	実際に Cinderella2 を用いて静的問題に対する理解を深める。ここでは 2 次曲線の代数的な形とそのグラフの形について考察する。
7	作図不可能性について講義・考察する。

5-2 「静的問題の数学的な解決」について  
 情報数学 I において連立方程式に解がないことを平行線は交わらないというような幾何

学的な視点に立たせコンピュータプログラムにおいてその事実を確認することができた。学生は3,4 回目の理論をメインとした講義では演習問題に取り組みさせてもあまり理解を示していなかったが後半に Cinderella2 を用いて作業をさせると理論で行った「だんだん大きくする」などの意味を捉えることができ理解を示していた。一方で「自動定理証明機能」を用いた数学の定理の証明は、文章で書かれた数学の証明をアルゴリズム的に読み解くことが非常に困難であり、その流れを把握させることが課題として残ってしまった。実際には「三角形 ABC のうち 2 本の中線の交点は残りの中線上にある。」という定理を扱う予定だったが、学生自身にどのようにアルゴリズムを作成するかを考える時間や第 4 回で行ったように Cinderella2 で用いられるような言葉に書き換える部分が時間内にできないと判断した。

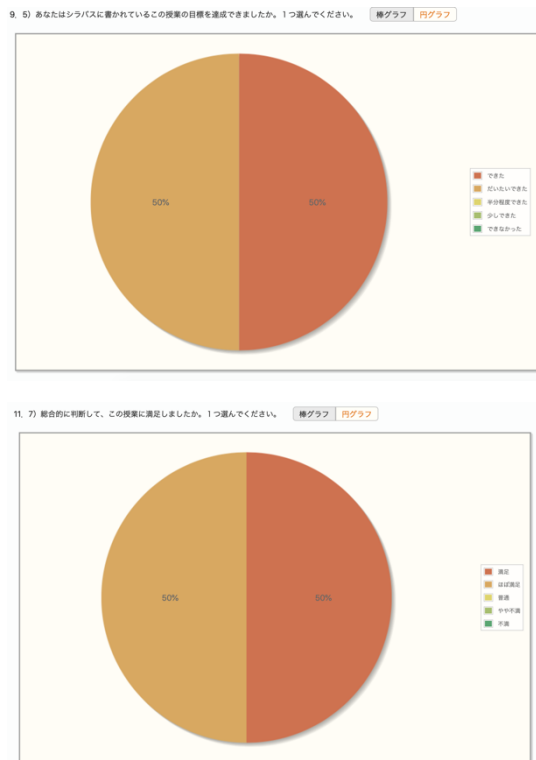
### 5-2 結果とその評価

- ・ 単に書かれた式を眺めるではなくソフトウェアに打ち込み数学の式を情報の力を使い可視化することで双方の力を使い一つのことを理解できた。
- ・ 解が存在しない連立方程式を平行線が交わらないという幾何学的な側面から理解し、静的問題への理解をコンピュータソフトを使い促すことができた。

### 5-3 特に授業改善が認められた内容

従来は教員が黒板にイメージ図を描いたりして一方的な表現になっていたが、計算によって得られた式を、コンピュータソフトを使うことにより、可視化することによって、結果何を意味するのかをより具体的に理解することができる。今回は実直線、実平面の無限大 $\infty$ を記述する方向から実射影平面を導入し、静的問題の解決を行なった。通常の平面では平行線が交わらないという事実を射影幾何的な見方をするすることで、無限遠方で交わることを実

際に確認することができた。それには学生も良い反応を示していた。学生の反応としては、以下のアンケート結果がある。設問は「あなたはシラバスに書かれているこの授業の目標を達成できましたか。1つ選んでください。」と「総合的に判断して、この授業に満足しましたか。1つ選んでください。」である。2 つとも概ね良い評価をが得られた。



## 6. まとめと今後の課題

静的問題への導入に時間がかかってしまい、動的問題の話や自動定理証明機能を導入するところまで行くことができなかった。その解決にはこの授業だけでなく数学と情報を分けて考えることをまずやめなくてはならない。学生側の意識として、数学科目は数学で、情報科目は情報で解決しようという形になっているのでその意識を変えて行くことが必要だと思われる。数学の式をアルゴリズムカルに見る訓練や書かれたソースコードを数式に置き換えるなどの訓練が必要だと思われる。その相互理解が得られるような環境になったときに、もう一度挑戦できればと考えている。

## 参考文献

- [1] 阿原一志, コンピュータ幾何, 数学書房選書, (2014)
- [2] 原田耕平: "幾何の証明問題の解決における困難の原因"日本数学教育学会第32回数学教育論文発表会論文集. 32. 227-232 (1999)

